

一类可由基本模型嵌套组成的 workflow 系统的性能分析方法

田立勤, 林 闯

(清华大学计算机科学与技术系, 北京 100084)

摘 要: 工作流是近年来网络领域里研究的一个热点, 对工作流模型的性能分析是工作流研究的一个重要内容. 实际的模型往往规模大而复杂, 这为分析其性能带来了很大的困难. 但有一类模型可由工作流的四种基本模型(顺序、并行、选择、循环)嵌套组成, 对于这类模型, 本文给出了计算其性能乘积解的数学公式. 文中给出了如何由这四种基本模型嵌套组成实际模型的方法, 推导出了计算这四种基本模型的性能等价公式, 并按建立实际模型相反的顺序, 由里到外逐层的分析方法, 给出了计算实际模型的性能乘积解.

关键词: 工作流模型; 性能分析; Petri 网

中图分类号: TP302 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2003) 12A-2167-04

Method for Computing Performance of a Kind of Workflow Models Nested by Basic Model

TIAN Li-qin, LIN Chuang

(Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Performance analysis of workflow has been drawing researchers' attention. It is difficult to analyze the performance of workflow when the model is large and complex. This paper gives analytic method to analyze the performance of a kind of workflow models that can be nested by four basic workflow models, i. e. the sequent, parallel, choice and iteration model. First, deduces the performance equivalent equations of the four basic workflow models, then discusses how to nest the four basic models into an actual model, how to analyze the performance of the new nested model and get its product-form solution.

Key words: workflow models; performance analysis; petri nets

1 引言

近年来, 工作流模型的性能分析和研究已成为一个研究热点^[1-3], 但由于实际工作流模型大而复杂, 很难求出模型的乘积解. 有很多文献讨论了工作流系统模型的性能问题^[4-6], 但都是针对工作流的某一方面特性来分析或改进工作流的性能, 如文献[4]是根据客户服务器这种工作流模型来对工作流的性能进行分析的, 文献[5]是根据具有时间限制的这种工作流模型来对工作流的性能进行分析的, 文献[6]对因动态工作流的动态改变所引起的“改变时间”的性能进行分析的. 由于工作流模型是由顺序、并行、选择、循环四种基本模型组成^[7], 一个复杂的工作流模型是由这四种基本模型组合而成, 因此分析如何将实际系统转换成这四种基本模型并能求出其性能的乘积解就具有一定的理论和实际价值, 而且计算方法也更为通用. 本文四种基本工作流模型是用随机 Petri 网描述的(关于更详细的 Petri 网内容读者可参考文[8]). 在工作流系统中, 我们用位置表示在工作流中所处的状态, 用事件表示工作流中独立的任务.

2 四种基本模型及其嵌套模型

2.1 工作流串联基本模型

由 n 个模块组成的工作流的串联模型如图 1 所示, 其中 t_1, t_2, \dots, t_n 是 n 个串行执行的模块.

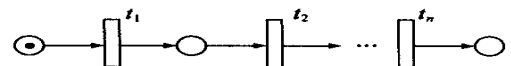


图 1 由 n 个模块组成的工作流的串联基本模型

2.2 工作流并联基本模型

由 n 个模块组成的并联模型如图 2 所示, 它表示 n 个模块 t_1, t_2, \dots, t_n 从模块 t_{start} 处开始并行执行, 到模块 t_{end} 处同步后结束.

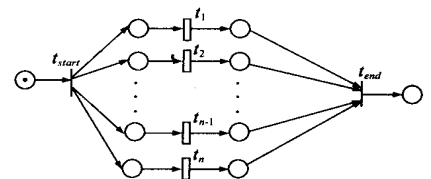


图 2 由 n 个模块组成的工作流的并联基本模型

收稿日期: 2002-09-27; 修回日期: 2003-11-22

基金项目: 国家“九七三”重点基础研究发展规划项目(No. G1999032707); 国家“八六三”高技术研究发展计划项目(No. 2001AA112080); 国家自然科学基金(No. 90104002, 60173012); 国家自然科学基金与香港研究资助局项目(No. 60218003); Intel 公司 IXA 大学研究项目(No. 9007); 深圳市宽带网多媒体重点实验室项目

2.3 workflow选择基本模型

由 n 个模块组成的选择模型如图 3 所示, 它表示从模块 t_1, t_2, \dots, t_n 中选择一个模块执行, 且设执行模块 t_i 的概率为

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

2.4 workflow循环基本模型

循环模型是用来定义需要重复执行多次的活动, 模块 t_1 执行结束后, 有一个重要的分支选择, 要么返回执行模块 t_2 , 接着重复执行模块 t_1 , 要么结束由模块 t_1 和模块 t_2 所组成的循环, 继续执行下一个流程. 设返回执行 t_2 的概率为 α , 则退出循环继续执行下一个流程的概率为 $1-\alpha$, 其模型见图 4 所示.

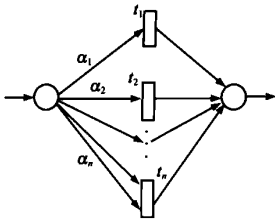


图 3 由 n 个模块组成的 workflow 的选择模型

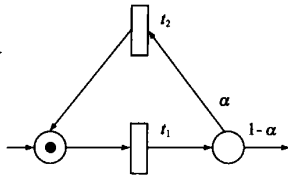


图 4 工作流的循环模型及其性能等价模型

2.5 基本模型的嵌套

最简单的模型如图 5 所示. 把它作为原始模型, 可以在此基础上进行模块的嵌套达到最终的复杂模型, 模型的嵌套是指某种模型中又包含另外其它三种模型, 在 Petri 网模型中, 具体的构造操作是把某个变迁替换某种基本模型就可以了, 下面举一个例子说明如何用嵌套的方法构造复杂大的模型, 将原始模型的变迁用一个由两个变迁组成的顺序基本模型替换得图 6 左边的第二个图, 将两个的上边变迁替换成由两个变迁组成的选择基本模型得图 6 左边的第三个图, 将下边的变迁替换成由两个变迁组成的并联基本模型得图 6 左边的第四个图, 将新得结果的并联基本模型的右边变迁替换成循环基本模型, 就得图 6 最右边复杂的工作流模型, 根据需要这个过程还可以继续替换下去, 就可以得到一类复杂的实际的工作流模型, 图中每个深颜色的变迁被右边浅颜色的基本模型所替换.

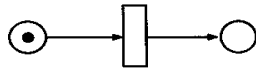


图 5 最简单的模型

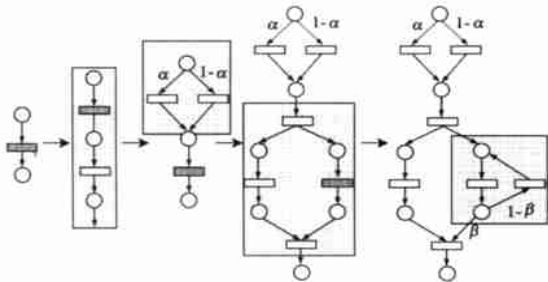


图 6 一个由基本模型经过嵌套构造复杂模型的过程

3 workflow并联模型的服务时间的等价计算方法

为了求出并联模型总的性能等价服务时间的概率密度, 我们用到顺序统计量^[9]的概念.

引理 1^[9] 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是 n 个独立的顺序统计量, 其分布函数分别为 $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$, 用 $F_r(t) (r = 1, 2, L, n)$ 表示第 r 次统计量 $X_{(r)}$ 的分布函数, 那么最大次的统计量的分布函数 $F_n(t)$ 为 $P_1(t)P_2(t)L P_n(t)$, 其中 $X_{(1)} = \min_{1 \leq k \leq n} X_k, X_{(n)} = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$.

由 n 个模块并联所组成的系统总的服务时间的物理意义及引理 1 知, 该系统(设为: B_n)的概率密度函数为:

$$\begin{aligned} f_{B_n}(y) &= F'_{B_n}(y) \\ &= P'_1(y)P_2(y)L P_n(y) + P_1(y)P'_2(y)L P_n(y) \\ &\quad + L + P_1(y)P_2(y)L P'_n(y) \end{aligned}$$

平均性能等价服务时间为:

$$\begin{aligned} E(y) &= \int_0^{\infty} y f_{B_n}(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} y (P'_1(y)P_2(y)L P_n(y) \\ &\quad + P_1(y) P'_2(y)L P_n(y) \\ &\quad + L + P_1(y)P_2(y)L P'_n(y)) dy \end{aligned}$$

由于常用指数分布描述系统的执行时间, 所以若随机变量 t_1, t_2, L, t_n 分别服从参数为 $\lambda_1, \lambda_2, L, \lambda_n$ 的指数分布函数, 则这 n 个模块的总的等价服务时间概率密度为:

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i e^{-\lambda_i t} - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k+1} (\lambda_j + \lambda_i) e^{-(\lambda_j + \lambda_i) t} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \sum_{l=j+1}^{k+1} (\lambda_l + \lambda_j + \lambda_i) e^{-(\lambda_l + \lambda_j + \lambda_i) t} + \dots \\ &\quad + (-1)^k \sum_{i=1}^{k+1} (\lambda_i) e^{-\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i t} \end{aligned}$$

则性能等价服务时间的期望值为:

$$\begin{aligned} E(y) &= \int_0^{\infty} y f_{B_n}(y) dy = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\lambda_i} - \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^{k+1} \frac{1}{\lambda_j + \lambda_i} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \sum_{l=j+1}^{k+1} \frac{1}{\lambda_l + \lambda_j + \lambda_i} + \dots + (-1)^k \frac{1}{\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i} \quad (1) \end{aligned}$$

4 workflow选择模型的服务时间的等价计算方法

定理 1 设 n 个选择模块 t_1, t_2, \dots, t_n 的服务时间为 n 个相互独立的随机变量 $\tau_1, \tau_2, L, \tau_n$, 其相应的概率密度函数为 $f_{t_1},$

f_{t_2}, L, f_{t_n} , 且执行模块 t_i 的概率为 $\alpha_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, 则这 n 个选择

模块总的服务时间的概率密度为: $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_{t_i}(y)$.

证明 设 n 个选择模块组成系统 B_n 的性能等价服务时间为 y , 现引入一个随机变量 I , 用它来决定执行哪个模块, 当 $I = t_i$ 时, 其概率为 α_i , 记为 $P(I = t_i) = \alpha_i (i = 1, 2, L, n)$. 其概率事件可以用下列公式进行描述:

$$p \left[\bigcup_{i=1}^n (I = t_i) \cap (t = y) \right]$$

又因为 t_1, t_2, \dots, t_n 是 n 个独立的随机变量, 所以上式为:

$$\sum_{i=1}^n p_i(t_i) f_{t_i}(t_i = y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_{t_i}(t_i = y)$$

则该系统 B_n 的总的服务时间的概率密度函数为:

$$f_{B_n}(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_{t_i}(y)$$

若随机变量 t_1, t_2, \dots, t_n 分别服从参数为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的指数分布函数, 则性能等价服务时间的期望值为:

$$E_{B_n}(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{1}{\lambda_i} \quad (2)$$

5 工作流串联模型服务时间的等价计算方法

5.1 由两个模块组成的工作流串联模型的服务时间的等价计算方法

设 2 个串联模块的服务时间为 2 个相互独立的随机变量 t_1, t_2 , 其相应的概率密度函数为 f_{t_1}, f_{t_2} , 且设这两个串联模块 t_1, t_2 组成的串联系统 B_2 的性能等价服务时间为 y , 根据卷积概念知其概率密度函数为:

$$\begin{aligned} f_{B_2}(y) &= f_{t_1}(y) \\ &= \int_0^y [f_{t_1}(t) f_{t_2}(y-t)] dt \\ &= (f_{t_1} * f_{t_2})(y), \text{ 其中 } * \text{ 为卷积符号.} \end{aligned}$$

这是一个卷积公式, 但卷积并不总是容易计算的. 卷积定理^[10]给出了把卷积转换成乘积的方法, 提供了卷积计算的简便方法. 根据卷积定理得:

$$F[f_{B_2}(y)] = F[f_{t_1}(y) * f_{t_2}(y)] = F_{t_1}(\omega) \cdot F_{t_2}(\omega)$$

进行傅氏逆变换得:

$$f_{B_2}(y) = F^{-1}[F[f_{B_2}(y)]] = F^{-1}[F_{t_1}(\omega) \cdot F_{t_2}(\omega)]$$

5.2 由 n 个模块组成的工作流串联模型的服务时间的等价计算方法

先分析由 3 个模块串联组成的系统 B_3 的性能等价服务时间, 由前面推导知, 前两个串联模块 t_1, t_2 的性能等价服务时间概率密度函数为 $f_{B_2}(t)$, 现设它们的性能等价服务时间与第三个模块的服务时间是相互独立的. 若设这 3 个串联模块 t_1, t_2, t_3 组成的串联系统 B_3 的性能等价服务时间为 y , 则其概率密度函数为:

$$\begin{aligned} f_{B_3}(y) &= f_{t_1} + t_2 + t_3(y) \\ &= \int_0^y f_{B_2}(t) f_{t_3}(y-t) dt \\ &= (f_{t_1} * f_{t_2} * f_{t_3})(y) \end{aligned}$$

经过这样不断的卷积运算可以求出 $f_{B_{n-1}}(y)$, 那么我们就可以得到由 n 个模块串联组成的工作流模型的性能等价服务时间的概率密度函数

$$\begin{aligned} f_{B_n}(y) &= f_{t_1}(y) \\ &= \int_0^y f_{B_{n-1}}(t) f_{t_n}(y-t) dt \\ &= (f_{t_1} * f_{t_2} * L * f_{t_n})(y) \end{aligned}$$

根据卷积定理得:

$$\begin{aligned} F[f_{B_n}(y)] &= F[f_{t_1} * f_{t_2} * L * f_{t_n}(y)] \\ &= F_{t_1}(\omega) \cdot F_{t_2}(\omega) L F_{t_n}(\omega) \end{aligned}$$

再进行傅氏逆变换后得概率密度函数:

$$f_{B_n}(y) = F^{-1}[F[f_{B_n}(y)]] = F^{-1}[F_{t_1}(\omega) \cdot F_{t_2}(\omega) L F_{t_n}(\omega)]$$

设随机变量 t_1, t_2, \dots, t_n 分别服从参数为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的指数分布函数, 则这 n 个模块的总的等价服务时间为:

$$\frac{1}{\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \quad (3)$$

6 工作流循环模型的服务时间的等价计算方法

循环模型见图 4 所示, 可以看到模块 t_1 总比模块 t_2 多执行一次. 设循环模块组成的系统 B 的性能等价服务时间为 y , 因为模块 t_1 不论循环与否总要执行一次, 若模块 t_2 循环执行 n 次, 则模块 t_1 循环执行 $n+1$ 次. 定义一个随机变量 \hat{n} 表示模块 t_2 执行的次数, 则此概率事件可以用下式进行描述:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p \left(\left[\sum_{j=1}^n t_{1j} + \sum_{j=1}^n t_{2j} = y \right] \mathbf{I}(\hat{n} = n) \right)$$

又因为 \hat{n} 具有几何分布, 即以概率 α 循环 n 次, 最后以概率 $1-\alpha$ 结束循环, 所以上式为:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((1-\alpha) \alpha^n p \left(\sum_{j=1}^{n+1} t_{1j} + \sum_{j=1}^n t_{2j} = y \right) \right)$$

根据卷积概念, 该模型的性能等价的服务时间的概率密度函数为:

$$f_B(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha) \alpha^n \left[f_{t_1} * f_{t_1} * L * f_{t_1} * f_{t_2} * L * f_{t_2} \right](y)$$

其中 $*$ 为卷积符号.

应用傅氏变换, 根据卷积定理得:

$$\begin{aligned} F[f_B(y)] &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha) \alpha^n F \\ &\cdot \left[\left[f_{t_1} * f_{t_1} * L * f_{t_1} * f_{t_2} * L * f_{t_2} \right] \right](y) \end{aligned}$$

因为卷积具有结合性, 所以上式:

$$\begin{aligned} F[f_B(y)] &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha) \alpha^n F_{t_1}^{n+1}(\omega) F_{t_2}^n(\omega) \\ &= \frac{(1-\alpha) \alpha^n F_{t_1}(\omega)}{1-\alpha F_{t_1}(\omega) F_{t_2}(\omega)} \end{aligned}$$

再用傅氏逆变换就得 $f_B(y)$:

$$f_B(y) = F^{-1}[F[f_B(y)]] = F^{-1} \left[\frac{(1-\alpha) \alpha^n F_{t_1}(\omega)}{1-\alpha F_{t_1}(\omega) F_{t_2}(\omega)} \right]$$

如果从概率密度推导期望值, 由于涉及到卷积计算, 比较复杂, 下面我们给出一种根据模型的物理意义直接推导出期望值的方法.

定理 2 设 2 个循环模块 t_1, t_2 的延时时间为 2 个相互独立的随机变量 t_1, t_2 , 其相应期望值为 $E t_1, E t_2$, 并假设执行完模块 t_1 后, 返回循环执行模块 t_2 的概率为 α , 则这 2 个循环模块总的平均等价服务时间为 $\frac{E t_1 + \alpha E t_2}{1-\alpha}$.

证明 模块 t_2 循环 n 次的概率为 $(1-\alpha) \alpha^n$, 其延时时间与 n 个模块 t_2 和 $(n+1)$ 个模块 t_1 串联的情形相同. 由串联公

式得, n 个模块 t_2 和 $(n+1)$ 个模块 t_1 串联的等价服务时间为 $nE t_2 + (n+1)E t_1$. 因此, 这 2 个循环模块总的平均等价服务时间为:

$$\begin{aligned} E(y) &= \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha) \alpha^i (iE t_2 + (i+1)E t_1) \\ &= (1-\alpha) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i iE t_2 + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i (i+1)E t_1 \right) \\ &= \frac{(\alpha E t_2 + E t_1)}{1-\alpha} \end{aligned}$$

若 2 个相互独立的随机变量 t_1, t_2 分别服从参数为 λ_1, λ_2 的指数分布函数, 即相当于已知上式中的 $E t_1 = \frac{1}{\lambda_1}, E t_2 = \frac{1}{\lambda_2}$, 代入上式, 得服从指数分布的循环模块总的平均服务时间为:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\frac{1}{\lambda_1} + \alpha \frac{1}{\lambda_2}}{1-\alpha} = \frac{\lambda_2 + \alpha \lambda_1}{(1-\alpha) \lambda_1 \lambda_2} \quad (4)$$

7 结论

workflow 模型的性能分析是 workflow 研究的一个非常重要的内容. 实际的模型往往规模大而复杂, 这给分析模型的性能带来很大的困难, 本文给出一类可由基本模型嵌套组成的 workflow 系统的性能评价方法. 对于这类模型, 可以逐层进行性能求解, 最终求出它的乘积解. 对于一个实际的 workflow 模型, 如果能转化成这四种模型的任意嵌套, 则可用本文的方法直接求出 workflow 模型的乘积解. 即使不能完全转化成这四种模型的嵌套, 也可对模型的一部分按照本文的方法进行性能的评价简化分析, 从而为分析实际的复杂的 workflow 模型的性能提供坚实的基础, 最终为改进模型或设计更好的模型提供定量分析的依据.

参考文献:

- [1] K Salimifard, M Wright. Petri net-based modelling of workflow systems: An overview [J]. European Journal of Operational Research, November 2001, 134(3): 664- 676.
- [2] W M P Van der Aalst, A H M ter Hofstede. Verification of workflow task structures: A Petri net-based approach [J]. Information Systems, 2000, 25(1): 43- 69.

- [3] K Kim, C A Ellis. Workflow performance and scalability analysis using the layered queuing modeling methodology [A]. Proceedings of the International ACM SIGGROUP Conference on Supporting Group Work [C]. Boulder, Colorado, USA: ACM, 2001. 135- 143.
- [4] K Kim, D Han. Performance and scalability analysis on client-server workflow architecture [A]. Proceedings of the International Conference on Parallel and Distributed Systems [C]. Boulder, Colorado, USA: ACM, 2001. 179- 186.
- [5] Jin Hyun Son, Myoung Ho Kim. Improving the performance of time constrained workflow processing [J]. Journal of Systems and Software, 2001, 58(3): 211- 219.
- [6] S Yamaguchi, G Qi-wei, M Tanaka. Performance evaluation on change time of dynamic workflow changes [J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 2000, E83-A(11): 2177- 2187.
- [7] W M P van der Aalst. The application of Petri nets to workflow management [J]. Journal of circuits, Systems and Computers, 1998, 8(1): 21- 66.
- [8] 林闯. 随机 Petri 网和系统的性能评价 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.
- [9] A D Herbert. Order Statistics [M]. 2nd ed, New York: Wiley Inter-Science, 1981. 18- 45.
- [10] T H Cormen, C E Leiserson, R L Rivest. Introduction to Algorithms [M]. Cambridge: The MIT Press, 1990.

作者简介:

田立勤 男, 1970 年 10 月生于陕西省定边县, 硕士, 讲师, 主要研究方向是计算机网络, workflow 模型, 系统性能评价和报文分类.
E-mail: tianliqin@tsinghua.org.cn



林闯 男, 1948 年 7 月生于辽宁省沈阳市, 博士, 清华大学计算机系教授, 博士生导师, 计算机网络研究所所长, 《计算机学报》编委, 国家自然科学基金重大研究计划“网络和信息安全”的科学指导专家, 中科院网络中心和北京科技大学兼职教授. 主要研究领域为计算机网络, 系统性能评价, 随机 Petri 网, 逻辑推演和推理系统. E-mail: chlin@tsinghua.edu.cn